

**Correction
concours général
mathématiques
2010**

i) O_2 a pour image O_3 et le rapport de l'homothétie est $-\frac{R_3}{R_2}$

$$\vec{\Omega O_3} = -\frac{R_3}{R_2} \vec{\Omega O_2} \Leftrightarrow \Omega \text{ est le barycentre de } \{(O_3, R_2) (O_2, R_3)\} \Leftrightarrow \Omega = D$$

L'homothétie de centre D et de rapport $-\frac{R_3}{R_2}$ est donc l'unique homothétie de rapport $-\frac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3 . On vérifie qu'elle transforme γ en γ' .

ii) O_2 a pour image O_3 et le rapport de l'homothétie est $\frac{R_3}{R_2}$,

De même il existe une unique homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3 .

Or $\frac{R_1}{R_2} \times \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc $h' \circ h$ (h et h' homothéties de la question 2) est une homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$, et qui transforme γ en γ' (il suffit d'appliquer h puis h'), donc O_2 en O_3

$h' \circ h$ est donc l'unique homothétie de rapport $\frac{R_3}{R_2}$ qui transforme γ en γ' .

Le centre de h est C, donc la droite (CF) est globalement invariante par h .

Le centre de h' est F, donc (CF) est invariante par h' , donc (CF) est invariante par $h' \circ h$, donc elle contient le centre de $h' \circ h$.

L'image de B est l'une des intersections de la parallèle à (BO_2) passant par O_3 et de γ' .

C'est E car le rapport de l'homothétie est positif, donc (BE) contient le centre de l'homothétie.

Le centre de $h' \circ h$ est donc l'intersection de (CF) et (BE), c'est le point G.

remarque . On en déduit de plus que O_2, D, O_3 et G sont alignés.

4. **C,D et E sont alignés** car E est l'image de C par l'homothétie de centre D et de rapport $-\frac{R_3}{R_2}$

Par l'homothétie h' , l'image de A est E, donc A,E et F sont alignés.

F appartient au cercle de diamètre [AC], donc (AF) est perpendiculaire à (CF) = (CG)

Dans le triangle AGC, on connaît donc 2 hauteurs (AF) et (BG), qui se coupent en E.

(CE) est la troisième hauteur, elle est perpendiculaire à (AG).

I est le milieu de [BE] et O_2 de [BC], donc $(IO_2) \parallel (EC)$, donc (IO_2) est perpendiculaire à (AG).

Dans le triangle AGO₂, on a donc 2 hauteurs (IO_2) et (BG) qui se coupent en I

La troisième hauteur est donc (AI), elle est perpendiculaire à (O_2O_3) donc à (GD)

(O_2I) est parallèle à (CD) déjà vu et (CD) est perpendiculaire à (BD), car D appartient au cercle de diamètre [BC], donc (O_2I) est perpendiculaire à (BD) et comme O_2 est équidistant de B et D,

(O_2I) est la médiatrice de [BD], donc par symétrie par rapport à (IO_2) , $\widehat{O_2DI} = \widehat{O_2BI} = 90^\circ$, donc (ID) est perpendiculaire à $(O_3D) = (O_2O_3)$

donc (AI) et (ID) perpendiculaires à (O_2O_3) sont confondues

5. $\widehat{AIB} = \widehat{DIG}$ (angles opposés par le sommet), $\widehat{ABG} = \widehat{IDG} = 90^\circ$ donc ils sont semblables avec un côté égal $IB = ID$, donc ils sont isométriques, donc $AB = GD$

6. Soit R_1, R_2 et R_3 les rayons des cercles de centre O_1, O_2 et O_3 .

γ' est l'image de γ par l'homothétie de centre G de rapport $\frac{R_3}{R_2}$, donc $\frac{R_3}{R_2} = \frac{GO_3}{GO_2} = \frac{GD - R_3}{GD + R_2}$

Or $GD = AB = 2R_1 - 2R_2$, donc $\frac{R_3}{R_2} = \frac{2R_1 - 2R_2 - R_3}{2R_1 - R_2} = (*) \frac{2R_1 - 2R_2}{2R_1} = 1 - \frac{R_2}{R_1}$

donc $R_3 = R_2(1 - \frac{R_2}{R_1})$ soit avec les notations de l'énoncé $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \right)$

(*) propriété de proportionnalité : si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

Exercice 2

1. avec $n = 3$ points, un seul triangle ABC donc $t(3) = 1$

avec $n = 4$ points A,B,C et D

on peut construire 4 triangles ABC, ABD, ACD et BCD et on vérifie que 2 triangles quelconques ont deux sommets en commun donc $t(4) = 4$

Avec $n = 5$ points A, B, C, D, E

Avec 5 sommets, on peut construire 10 triangles

ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE

Parmi les $t(5)$ triangles construits, 2 quelconques ont 2 sommets en commun (il n'y a que 5 sommets)

Par exemple ABC et ABD.

La construction de ces deux triangles élimine les triangles ACE, BCE, BDE et CDE

Il reste ABC ABD ABE ACD et BCD

Si on choisit ABC, ABD et ABE, on doit éliminer ACD et BCD

Si on ne construit pas ABE, on peut construire ABC, ABD, ACD et BCD.

En conclusion le plus grand nombre de triangles que l'on puisse construire avec 5 points est 4 donc $t(5) = 4$.

Avec $n = 6$ points A, B, C, D, E, F, en procédant de même, on obtient $t(6) = 4$

Par exemple ABC, ABD, ABE et ABF

Pour comprendre la démonstration générale, on peut calculer $t(7)$

On a 7 sommets $X_1 X_2 \dots X_7$

Soit tous les triangles construits sont disjoints et on ne peut construire que deux triangles par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_4 X_5 X_6$

Soit 2 triangles au moins ont 2 sommets en commun par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$

On construit 4 groupes de triangles

groupe 1 : $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$

groupe 2 : $X_1 X_3 X_4$ et $X_2 X_3 X_4$

groupe 3 : $X_1 X_2 X_5$ et $X_1 X_2 X_6$ et $X_1 X_2 X_7$

groupe 4 : $X_5 X_6 X_7$ il y a $t(3) = 1$ triangles constructibles

On part des deux triangles du groupe 1

Si on prend un triangle du groupe 2, cela élimine les 3 triangles du groupe 3, donc autant prendre les deux triangles du groupe 2, puis le triangle du groupe 4, ce qui donne en tout $2 + 2 + 1 = 5$ triangles

Si on prend un triangle du groupe 3, cela élimine tous les triangles du groupe 2 et le triangle du groupe 4, donc autant prendre tous les triangles du groupe 3 et on obtient $2 + 3 = 5$ triangles

Le maximum de triangles obtenu est 5, donc $t(7) = 5$

2. Pour simplifier la récurrence, on peut poser $t(0) = t(1) = t(2) = 0$

Soit $P(n)$ la propriété : $\{-2 \leq t(0) \leq 0, -1 \leq t(1) \leq 1, \dots, n-3 \leq t(n-1) \leq n-1\}$. $P(7)$ est vraie

Supposons que pour un certain entier $n \geq 7$, $P(n)$ soit vraie

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n sommets,

Ou bien (1) : On ne construit que des triangles disjoints. On ne peut en construire que $E\left(\frac{n}{3}\right) \leq \frac{n}{3} \leq n-2$

Ou bien (2), pour n sommets X_1, \dots, X_n avec $n \geq 7$, on part de 2 triangles ayant 2 sommets en commun X_1 et X_2 , $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$

On peut constituer 4 groupes de triangles : G_2 et G_3 regroupent tous les triangles ayant 2 sommets en commun avec les triangles de G_1 et G_4 regroupe les triangles constructibles n'ayant aucun point en commun avec les triangles de G_1

Groupe 1 : $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$

Groupe 2 : $X_1 X_3 X_4$ et $X_2 X_3 X_4$

Groupe 3 : $X_1 X_2 X_5, X_1 X_2 X_6, \dots, X_1 X_2 X_n$

Groupe 4 : triangles constructibles avec les $n-4$ points X_5, X_6, \dots, X_n

Pour construire des triangles répondant à la règle , on part des deux triangles du groupe 1
Soit (2 a) on choisit les triangles du groupe 2 , ce qui élimine tous les triangles du groupe 3
 et on utilise tous les triangles du groupe 4 , ce qui donne 2 (groupe 1) + 2 (groupe 2) + t(n - 4)
 (groupe 4) , donc on obtient exactement $4 + t(n - 4)$ triangles .
 et on a l'encadrement $n - 6 \leq t(n - 4) \leq n - 4$, donc $n - 2 \leq 4 + t(n - 4) \leq n$

Soit (2 b) on ne choisit pas les triangles du groupe 2 , mais ceux du groupe 3
 Si on choisit k ($1 \leq k \leq n - 4$) triangles du groupe 3 , on doit éliminer k sommets du groupe 4 , et il
 restera la possibilité de construire t(n - 4 - k) triangles du groupe 4
 ce qui donnera $2 + k + t(n - 4 - k)$ triangles constructibles avec n sommets
 mais $2 + k + t(n - 4 - k) \leq 2 + k + n - 4 - k = n - 2$

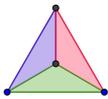
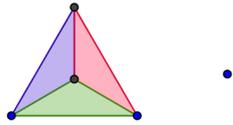
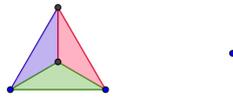
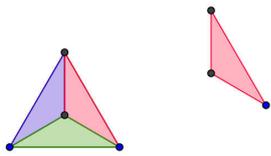
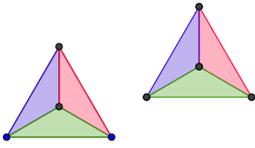
C'est le choix (2 a) qui donne le plus de triangles , donc $n - 2 \leq t(n) \leq n$
 donc P(n+1) est vraie et pour tout n , $t(n) \leq n$

De plus $t(n) = 4 + t(n - 4)$, ce qui permet de montrer par récurrence que
 pour tout entier $k \geq 1$, P(k) = " $t(4k) = 4k$, $t(4k + 1) = 4k$, $t(4k + 2) = 4k$, $t(4k + 3) = 4k + 1$ " est vraie

P(1) = " $t(4) = 4$, $t(5) = 4$, $t(6) = 4$, $t(7) = 5$ " est vraie
 Supposons P(k) vraie pour un certain entier $k \geq 1$
 $t(4(k + 1)) = t(4k + 4) = t(4k) + 4 = 4k + 4 = 4(k + 1)$
 $t(4(k+1) + 1) = t(4k + 1 + 4) = t(4k + 1) + 4 = 4k + 4 = 4(k + 1)$
 de même $t(4(k + 1) + 2) = 4(k + 1)$ et $t(4(k + 1) + 3) = 4(k + 1) + 1$
 et la propriété est vraie au rang k + 1

Par exemple $t(4001) = t(4 \times 1000 + 1) = 4 \times 1000 = 4000$

3.

	<p>Avec 4 sommets , on obtient 3 triangles qui ne se recoupent pas , à condition d'avoir cette configuration de base , donc $u(4) = 3$</p>
	<p>Avec 5 sommets ABCDE , 2 triangles ont forcément 2 sommets en commun. Par exemple ABC et ABD ce qui élimine ABE à cause de la règle de non chevauchement et tous les triangles avec un seul sommet en commun , c'est-à-dire tous les triangles xyE. Il reste BCD et ACD comme dans le cas précédent et le choix de l'un élimine l'autre , donc $u(5) = 3$</p>
	<p>$u(6) = 4$ même type de raisonnement $u(7) = 5$</p>
	<p>Avec 8 sommets ABCDEFGH Soit tous les triangles sont disjoints , ABC , DEF ce qui donne 2 triangles Soit , on part de 2 triangles avec 2 sommets en commun ABC et ABD , ce qui élimine tous les triangles de type ABx . Les seuls autres triangles avec 2 sommets en commun avec ABC et ABD , sont BCD et ACD. Le choix de l'un élimine l'autre car $u(4) = 3$.</p>
	<p>On peut construire $u(4) = 3$ triangles sans sommets commun avec ABCD , avec les 4 sommets EFGH , donc $u(8) = 3 + 3 = 6$</p>

4. Soit $P(n) = " \frac{4}{3} < u(4), \dots, \frac{n-1}{3} < u(n-1) "$ $P(9)$ est vraie.

Supposons que pour un certain entier $n \geq 9$, $P(n)$ soit vraie. On considère n sommets X_1, \dots, X_n .

Ou bien tous les triangles sont disjoints et il y a moins de $\frac{n}{3}$ triangles

Ou bien, il y a 2 triangles avec deux sommets en commun, par exemple $X_1 X_2 X_3$ $X_1 X_2 X_4$

On ne peut construire d'autres triangles avec 2 sommets en commun avec l'un de ces 2 triangles sauf $X_2 X_3 X_4$ ($X_1 X_3 X_4$ et $X_1 X_2 X_k$ $k \geq 5$ impossibles à cause de la règle de non-chevauchement)

Il reste les $u(n-4)$ triangles constructibles avec les sommets X_5, X_6, \dots, X_n

Avec cette méthode, on peut construire $3 + u(n-4)$ triangles

Or $\frac{n-4}{3} < u(n-4)$, donc $\frac{n}{3} < \frac{n-4}{3} + 3 \leq 3 + u(n-4)$ et $P(n+1)$ est vraie

On a de plus montré que $u(n) = u(n-4) + 3$.

C'est cette formule qui permet de montrer par récurrence comme dans 2) que pour tout entier $k \geq 1$

$u(4k) = u(4k+1) = u(4k+2) = 3k$ et $u(4k+3) = 3k+1$

Par exemple $u(4001) = u(4 \times 1000 + 1) = 3 \times 1000 = 3000$

Exercice 3

1. a. la probabilité qu'il n'y ait pas compatibilité est $6abc$ (pour les 6 cas ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) donc la probabilité qu'il y ait compatibilité est $p = 1 - 6abc$

1. b. **minorer p revient à majorer abc**

$$abc = a(1-a-c)c = ac - a^2c - ac^2$$

Soit c un réel donné $\in [0;1]$. On pose $f(x) = cx - cx^2 - c^2x$ de dérivée $f'(x) = -2cx + c - c^2$

x	0	$\frac{1-c}{2}$	1	
f'(x)		+	0	-
f(x)	0	$f(\frac{1-c}{2})$	$-c^2$	

$$\text{donc } abc = f(a) \leq f\left(\frac{1-c}{2}\right) = c\left(\frac{1-c}{2}\right) - c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - c^2\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{c^3 - 2c^2 + c}{4}$$

Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ de dérivée $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x - 1)$ (avec Δ)

x	0	$\frac{1}{3}$	1	
g'(x)		+	0	-
g(x)	0	$\frac{4}{27}$	0	

$$\text{donc } g(c) \leq \frac{4}{27}, \text{ donc } f\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{g(c)}{4} \leq \frac{1}{27} \text{ et donc } abc = f(a) \leq f\left(\frac{1-c}{2}\right) \leq \frac{1}{27}, \text{ donc } 6abc \leq \frac{6}{27} = \frac{2}{9},$$

$$\text{donc } 1 - 6abc \geq 1 - \frac{2}{9}, \text{ ce qui donne finalement } p \geq \frac{7}{9}$$

2. a. Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont :

AAA, AAB, ABA, BAA, AAC, ACA, CAA ce qui donne pour probabilité

$$a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n = a_n^2(a_n + 3b_n + 3c_n) \text{ et avec } b_n + c_n = 1 - a_n$$

$$= a_n^2(a_n + 3(1 - a_n)) = a_n^2(3 - 2a_n)$$

La probabilité que la descendance soit de type A sachant que les 3 parents sont compatibles est donc

$$a_{n+1} = \frac{P(\text{descendance est A} \cap \text{parents compatibles})}{P(\text{parents compatibles})} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

De même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

2. b. Soit $f(x) = x^2(3 - 2x) = 3x^2 - 2x^3$ de dérivée $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$

x	0	1
f'(x)		+
f(x)	0	1

Soit $P(n)$ " $0 < c_n < b_n < a_n < 1$ " pour n entier naturel

$P(0)$ est vraie par hypothèse

Supposons que pour un certain entier naturel n , $P(n)$ soit vraie

$0 < c_n < b_n < a_n < 1$, donc f étant croissante sur $[0;1]$, $0 < f(c_n) < f(b_n) < f(a_n) < 1$

donc en divisant par $1 - 6a_nb_nc_n$, on obtient $0 < c_{n+1} < b_{n+1} < a_{n+1}$ et $a_{n+1} < 1$ par définition de a_{n+1}

On a montré par récurrence que pour tout naturel n , $0 < c_n < b_n < a_n < 1$

donc pour tout n , $a_n + b_n + c_n > 3c_n$, donc $3c_n < 1$ et $c_n < \frac{1}{3}$

et $a_n + b_n + c_n < 3a_n$, donc $1 < 3a_n$ et $a_n > \frac{1}{3}$

$2b_n < a_n + b_n = 1 - c_n < 1$, donc $b_n < \frac{1}{2}$

$$2. c. a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n} - \frac{b_n^2(3 - 2b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n} = \frac{3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

Or $1 - 6a_nb_nc_n < 1$, donc $\frac{1}{1 - 6a_nb_nc_n} > 1$

donc $a_{n+1} - b_{n+1} > 3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3) = 3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)$

donc $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 3(a_n + b_n) - 2(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2) = 3(a_n + b_n) - 2[(a_n + b_n)^2 - a_nb_n]$

$$= 3(1 - c_n) - 2[(1 - c_n)^2 - a_nb_n]$$

$$= 1 + c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n$$

or a_n et $b_n > c_n$ donc $2a_nb_n > 2c_n^2$

donc $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 1 + c_n - 2c_n^2 + 2c_n^2 > 1 + c_n > 1$, donc $(a_n - b_n)$ est croissante

De même $\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} > 1 + b_n - 2b_n^2 + 2a_nc_n = 1 + b_n(1 - 2b_n) + 2a_nc_n > 1$ car $b_n < \frac{1}{2}$

donc la suite $(a_n - c_n)$ est croissante

2. d. On en déduit que la suite $v_n = a_n - b_n + a_n - c_n = 3a_n - 1$ est croissante

donc $a_n = \frac{v_n + 1}{3}$ et (a_n) est croissante

La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente de limite A

$(a_n - b_n)$ est croissante et majorée par 1, donc convergente,

donc (b_n) est convergente car $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ de limite B

De même on montre que la suite (c_n) est convergente de limite C

Les relations de récurrence montrent en utilisant $\lim A_n = \lim A_{n+1} = A$ que

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{A^2(3 - 2A)}{1 - 6ABC} \\ B = \frac{B^2(3 - 2B)}{1 - 6ABC} \\ C = \frac{C^2(3 - 2C)}{1 - 6ABC} \end{array} \right.$$

et la relation $a_n + b_n + c_n = 1$ entraîne $A + B + C = 1$

Supposons $C \neq 0$, alors $C(3 - 2C) = 1 - 6ABC \geq \frac{7}{9}$ d'après 1)b),

d'où après simplification, $18C^2 - 27C + 7 \leq 0$ soit $C \in [\frac{1}{3}; \frac{7}{6}]$ (avec Δ)

Or pour tout n , $c_n < \frac{1}{3}$, donc $C \leq \frac{1}{3}$, donc $C = \frac{1}{3}$ et $A + B = \frac{2}{3}$

De $c_n \leq b_n \leq a_n$, on déduit que $2c_n \leq 2b_n \leq a_n + b_n$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim 2b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim b_n = \frac{1}{3}$, puis $\lim a_n = \frac{1}{3}$

Or la suite $(a_n - b_n)$ est croissante donc pour tout n , $a_n - b_n \geq a_0 - b_0$ et par passage à la limite,

$A - B \geq a_0 - b_0 > 0$, donc on ne peut avoir $A = B = \frac{1}{3}$

On vient de montrer par l'absurde que $C = 0$, donc $A = A^2(3 - 2A)$

$A \neq 0$ donc $1 = A(3 - 2A) \Leftrightarrow 2A^2 - 3A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = 1$ ou $A = \frac{1}{2}$

La solution $A = B = \frac{1}{2}$ est impossible car contradictoire avec $A > B$

Il reste donc la solution $A = 1$ et $B = 0$ et on vérifie que $(1,0,0)$ est solution du système

3. a. Les cas où la descendance est A et les parents compatibles se produit lorsque les parents sont :

AAA, ABB, BBA, BAB, ACC, CCA, CAC ce qui donne pour probabilité

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 3a_n(b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n^3 + 3b_n(a_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} ; c_{n+1} = \frac{c_n^3 + 3c_n(a_n^2 + b_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

3. b. **On considère la propriété $P(n)$: " $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ "**

$P(0)$ est vraie par hypothèse

Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} & \text{ est du signe de } a_n^3 + 3a_nb_n^2 + 3a_nc_n^2 - b_n^3 - 3b_na_n^2 - 3b_nc_n^2 \\ & = (a_n - b_n)^3 + 3a_nc_n^2 - 3b_nc_n^2 \\ & = (a_n - b_n)^3 + 3c_n^2(a_n - b_n) > 0 \text{ car } a_n > b_n \end{aligned}$$

de même $b_{n+1} - c_{n+1}$ est du signe de $(b_n - c_n)^3 + 3a_n^2(b_n - c_n) > 0$ car $b_n > c_n$

donc $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1} > 0$ (car a_n, b_n et $c_n > 0$) et $1 > a_{n+1}$ par définition de a_{n+1}

donc $P(n+1)$ est vraie

3. c. $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n}$. Posons $a_n = a$, $b_n = b$ et $c_n = c$, $a + b + c = 1$

majorons le dénominateur

$$1 - 6abc = 1 - 6a(1 - a - c)c = 1 - 6ac + 6a^2c + 6ac^2$$

$$\text{Comparons avec } 1 - 6c^2 + 12c^3 = 1 - 6c^2 + 6c^3 + 6c^3$$

$$1 - 6abc - (1 - 6c^2 + 12c^3) = 6c^2 - 6ac + 6a^2c - 6c^3 + 6ac^2 - 6c^3$$

$$= 6c(c - a) + 6c(a^2 - c^2) + 6c^2(a - c)$$

$$= 6c(c - a)[1 - (a + c) - c]$$

$$= 6c(c - a)(b - c) < 0 \quad \text{car } 0 < c < b < a$$

donc $1 - 6a_nb_nc_n \leq 1 - 6c_n^2 + 12c_n^3 = g(c_n)$

minorons le numérateur

$$c^2 + 3a^2 + 3b^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2}c^2\right) = 3a^2 + 3b^2 - \left(\frac{3}{2} - 3c + \frac{3}{2}c^2\right)$$

$$= 3a^2 + 3b^2 - \frac{3}{2}(c - 1)^2 \text{ or } c - 1 = -a - b$$

$$= 3a^2 + 3b^2 - \frac{3}{2}(a + b)^2 = \frac{3}{2}(a - b)^2 \geq 0$$

$$\text{donc } c^2 + 3a^2 + 3b^2 \geq \frac{3}{2} - 3c + \frac{5}{2} c^2$$

$$\text{en revenant aux notations } \mathbf{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n)}$$

On a montré que $c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2 \geq f(c_n) > 0$ (calculer Δ de f)

$$\text{et } 0 < \frac{7}{9} \leq 1 - 6a_n b_n c_n \leq g(c_n),$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 - 6a_n b_n c_n} \geq \frac{1}{g(c_n)}$$

$$\text{donc par produit des inégalités, } \frac{c_n^2 + 3a_n^2 + 3b_n^2}{1 - 6a_n b_n c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)} \text{ donc } \frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$$

$$3. d. \text{ Soit } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2f(x)}{2g(x)} = \frac{5x^2 - 6x + 3}{24x^3 - 12x^2 + 2}$$

$$\text{Etudions } t(x) = 2f(x) - 2g(x)$$

$$= 5x^2 - 6x + 3 - 24x^3 + 12x^2 - 2 = -24x^3 + 17x^2 - 6x + 1 \text{ sur } [0;1]$$

$$t'(x) = -72x^2 + 34x - 6 \text{ de discriminant } \Delta < 0, \text{ donc } t'(x) < 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	1
t'(x)		-	
t(x)	1	0	-12

donc pour tout $x \in [0; \frac{1}{3}]$, $t(x) \geq 0$, donc $5x^2 - 6x + 3 \geq 24x^3 - 12x^2 + 2$

donc $24x^3 - 12x^2 + 2$ étant > 0 sur $[0; \frac{1}{3}]$ (dérivée et variation évidente)

On en déduit que sur $[0; \frac{1}{3}]$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

Or on sait depuis 2) b) que $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ entraîne que $0 < c_n < \frac{1}{3}$

donc $\frac{f(c_n)}{g(c_n)} \geq 1$, donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$ et la suite (c_n) est croissante

La suite (c_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{3}$, donc elle est convergente vers $C \neq 0$

(car $c_n \geq c_0 > 0$ entraîne par passage à la limite $C \geq c_0 > 0$)

$C \in [0; \frac{1}{3}]$, donc d'après l'étude de t , $\frac{f(C)}{g(C)} \geq 1$

Mais $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$ entraîne par passage à la limite : $1 \geq \frac{f(C)}{g(C)}$ (f et g continues)

donc $\frac{f(C)}{g(C)} = 1$, donc $t(C) = 0$, donc $C = \frac{1}{3}$.

De $a_n + b_n + c_n = 1$, on déduit que la suite $(a_n + b_n)$ a pour limite $\frac{2}{3}$

De $c_n \leq b_n \leq a_n$, on déduit que $2c_n \leq 2b_n \leq a_n + b_n$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim 2b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim b_n = \frac{1}{3}$, puis $\lim a_n = \frac{1}{3}$